

Dynamique des fluides géophysiques-TD du 27 novembre 2001

1 Modèle de Phillips (1954)

Rappel : Dans un milieu à deux couches en négligeant toute dissipation, la conservation de la vorticité potentielle dans chaque couche i peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{D_i}{Dt} \left(\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} + (-1)^i F_i (\psi_1 - \psi_2) + \beta y \right) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

où

$$F_i = \frac{f_0^2}{g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_0} H_i}$$

et ψ_i est la fonction de courant de la couche i .

Le modèle de Phillips(1954) est le cas particulier où on étudie les perturbations autour d'un écoulement de base constant (U_1, U_2) .

1.1 Linéarisation.

Linéariser l'équation (1). On notera ϕ_i la fonction de courant perturbée dans la couche i .

1.2 Modes normaux : $\phi_i = Re(A_i \cos(l y) e^{ik(x-ct)})$.

Dans ce cadre on rappelle les équations que doivent vérifier (A_1, A_2) solutions du système linéarisé :

$$\begin{aligned} A_1((c - U_1)(K^2 + F_1) + \beta + F_1(U_1 - U_2)) - A_2(c - U_1)F_1 &= 0 \\ A_2((c - U_2)(K^2 + F_2) + \beta - F_2(U_1 - U_2)) - A_1(c - U_2)F_2 &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

et les solutions associées au déterminant nul s'écrivent :

$$c = U_2 + \frac{U_s K^2 (K^2 + 2F_2) - \beta(2K^2 + F_1 + F_2)}{2K^2 (K^2 + F_1 + F_2)} \pm \frac{(\beta^2 (F_1 + F_2)^2 + 2\beta U_s K^4 (F_1 - F_2) - K^4 U_s^2 (4F_1 F_2 - K^4))^{1/2}}{2K^2 (K^2 + F_1 + F_2)}$$

où $U_s = U_1 - U_2$.

a. Dans le cas $F_1 = F_2 = F$ et $U_s > 0$, retrouver le critère nécessaire d'instabilité barocline.

b. Dans le cas instable, quelles sont les structures des perturbations qui permettent d'extraire l'énergie à l'écoulement de base.

c. Quelles sont les différences concernant les structures et les croissances entre les perturbations du mécanisme d'Orr et les modes normaux dans l'instabilité barocline du modèle de Phillips.

1.3 Application à un cas océanique.

On considère un océan présentant une thermocline vers 800m et d'épaisseur totale 5000m.

a. Quel est l'ordre de grandeur des cisaillements nécessaires pour qu'il y ait instabilité barocline dans une région telle que le Gulf Stream où le rayon de interne de déformation vaut 50km ($R^{-2} = \frac{f_0^2(H_1+H_2)}{g'H_1H_2} = (50km)^{-2}$) ?

b. Pour $U_s = 2U_c = \frac{2\beta}{F_2}$, déterminer dans quel intervalle des longueurs d'onde se trouvent les ondes instables ?